

Joachim Stiller

Materialien zur Mathematik V

Rekursionsgleichungen und -folgen

Additionsfolgen mit $f_0 = 2$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
2	0	2	2	4	6	10	2+2-Folge
2	1	3	4	7	11	18	Lucas-Folge (1+3-Folge)
2	2	4	6	10	16	26	2+2-Folge
2	3	5	8	13	21	34	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
2	4	6	10	16	26	42	2+2 Folge
2	5	7	12	19	31	50	

Alle Rechte vorbehalten

Teil 1

Allgemeiner Teil

Allgemeiner Teil

Die Fibonacci-Zahlen und die Zahl Pi

Gegeben seien vier aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen $b-a$, a , b , $b+a$. Bildet man aus diesen Zahlen ein Rechteck (siehe Abbildung), so ist die Differenz der zwei Winkel $u-v$ gleich 45° . Dann ergibt sich also:

$$\pi / 4 = \arctan (b / a) - \arctan ((b - a) / (b + a))$$

und allgemein:

$$\pi / 4 = \arctan (F_{n+1} / F_n) - (F_{n-1} / F_{n+2})$$

Zum Beispiel wird für 3, 5, 8, 13

$$\pi / 4 = \arctan (8 / 5) - \arctan (3/13).$$

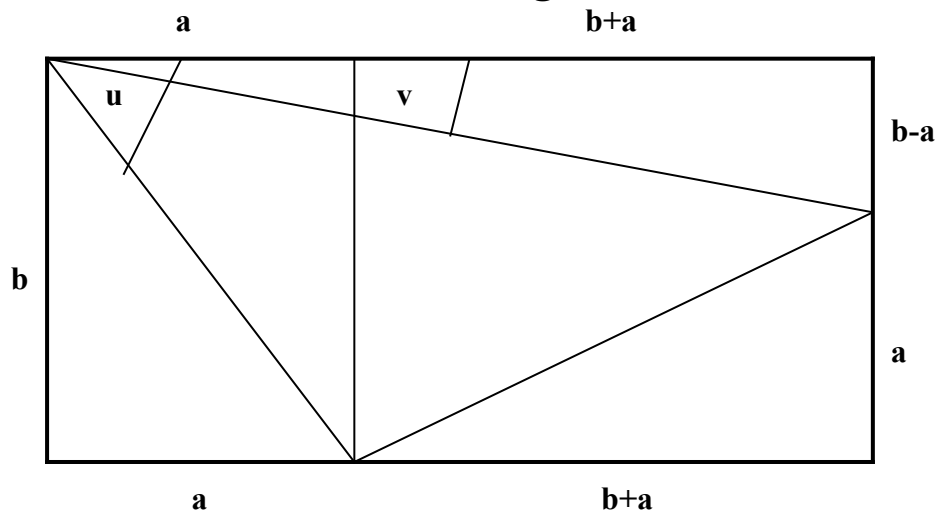
Diese Beziehung gilt auch für die Lucas-Zahlen und außerdem für jede beliebige Zahlenfolge, welche die Rekursionsgleichung

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

erfüllt, zum Beispiel für 1, 7, 8, 15... wird

$$\pi / 4 = \arctan (8 / 7) - \arctan (1 / 15)$$

Zeichnung



$$\pi / 4 = \arctan (b / a) - \arctan ((b - a) / (b + a))$$

Zeckendorf-Zerlegung

Nach einer Entdeckung von Edouard Zeckendorf kann jede natürliche Zahl als Summe von zwei oder mehr, nicht notwendig aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen dargestellt werden.

Zeckendorf-Zerlegung II

Nach meiner eigenen Entdeckung kann jede natürliche Zahl als Summe ein oder mehrerer, nicht notwendig aufeinanderfolgender Potenzen der Zahl 2 + der Zahl 1 dargestellt werden. Möglicherweise ist diese Zerlegung auch vor mir schon bekannt gewesen. Die zu dieser Folge gehörende Formel lautet:

$$f_n = 2 \times f_{n-1}$$

In Zahlen ausgedrückt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Diese wirklich hübsche Folge stellt praktisch einen oberen Grenzwert für die Möglichkeiten einer Zeckendorf-Zerlegung dar. Sobald die Intervalle größer werden, ist eine Zeckendorf-Zerlegung nicht mehr möglich. Die Intervalle müssen also kleiner oder gleich den Intervallen dieser Folge sein, wenn eine Zeckendorf-Zerlegung möglich sein soll.

Eine untere Grenzfolge stellt dann die Folge 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ... dar.

Eine mittlere Grenzfolge stellt dann die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... dar, die Reihe der natürlichen Zahlen N. Auch sie genügt der Zeckendorf-Zerlegung.

Eine besondere Folge

Eine wie ich finde ebenfalls besonders hübsche Folge stellt diese dar:

$$f_n = f_{n-1} + (n-1)$$

In Zahlen ausgedrückt: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ...

Reihen und Konvergenz

Sehen wir uns folgende Folge an:

In Zahlen ausgedrückt: $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$. Diese Folge ist Konvergent.

Und nun die dazugehörige Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

Die Summe dieser Reihe ist genau 1. Die Reihe ist Konvergent. Dadurch, dass aber die Summe dieser Reihe genau 1 ist, können wir uns überlegen, dass diese Reihe einen Grenzfall in Bezug auf die Konvergenz darstellt. Reihen, deren Intervalle kleiner oder gleich den Intervallen dieser Folge sind, sind grundsätzlich konvergent. Sind die Intervalle hingegen größer, so sind die Reihen invertegent.

Ein Beispiel für eine weitere konvergente Reihe: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}$

Die Summe dieser Reihe liegt bei genau $\frac{2}{3}$, wie man sich leicht überzeugen kann.

Lucas-Folgen (allgemein)

Alle Lucas-Folgen sind durch folgende Rekursionsformel (Rekursionsgleichung) eindeutig bestimmt:

$$f_n = f(n-1) + f(n-2) \quad \text{für } n \text{ größer gleich } 2$$

Jetzt muss ich nur noch die beiden Anfangswerte f_0 und f_1 festlegen, und die Lucas-Folge ist eindeutig und vollständig definiert. Das machen wir ganz allgemein so:

$$f_0 = a \text{ und } f_1 = b.$$

Dabei sind a und b beliebige natürliche Zahlen der Menge \mathbb{N} bzw. \mathbb{N}_0 . Wir arbeiten der Einfachheit zunächst ausschließlich mit der Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich.

Eine weitere Rekursionsformel (Rekursionsgleichung) wäre beispielsweise:

$$f_n = f(n-1) - f(n-2) \quad \text{für } n \text{ größer gleich } 2$$

Mit den Anfangswerten:

$$f_0 = a \text{ und } f_1 = b,$$

wobei auch hier a und b beliebige natürliche Zahlen der Menge \mathbb{N} bzw. \mathbb{N}_0 sind. Es wird aber schon hier deutlich, dass die Verknüpfung zwischen $f(n-1)$ und $f(n-2)$ völlig beliebig ist.

Die Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge stellt eine spezielle Lucas-Folge dar. Sie ist wie folgt eindeutig definiert:

$$f_n = f(n-1) + f(n-2) \quad \text{für } n \text{ größer gleich } 2$$

Mit den festgelegten Anfangswerten

$$f_0 = 0 \text{ und } f_1 = 1$$

Manchmal lässt man auch $f_0 = 0$ weg und schreibt

$$f_1 = 1 \text{ und } f_2 = 1$$

Rekursionsgleichungen

Die folgende Rekursionsgleichung stellt eine bestimmte Verknüpfungsformel zweier Folgeglieder (Multiplikations-Additions.-Multiplikations-Gleichung).

$$f_n = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) \quad \text{für } n \text{ größer gleich } 2$$

Dabei sind n , a_1 und a_2 natürlich Zahlen aus \mathbb{N} bzw. \mathbb{N}_0 .

Rekursionsgleichungen (allgemein)

Eine allgemeine Form, auf die ich die Rekursionsgleichungen bringen konnte, lautet wie folgt:

$$f_n = a_1 f(n-b_1) \circ a_2 f(n-b_2) \quad \text{für } n \text{ größer gleich } b_1 \text{ und } b_2$$

Dabei sind n , b_1 , b_2 , a_1 und a_2 natürliche Zahlen aus \mathbb{N} bzw. \mathbb{N}_0 . Die Verknüpfung hingegen ist beliebig (+, -, x, /).

Nichtlineare Rekursionsgleichungen

Nichtlineare Rekursionsgleichungen haben die allgemeine Form:

$$f_n = a f(n-1) \times (-b f(n-1)) \quad \text{für } n \text{ größer gleich } 1$$

Gehen wir einmal die Entwicklungsschritte der nichtlinearen Rekursionsgleichungen durch:

- 1. Schritt: $f_n = 2 f(n-1)$
- 2. Schritt: $f_n = a f(n-1)$
- 3. Schritt: $f_n = a f(n-1) \times (-b f(n-1))$

Die Zahl f_n wird praktisch mit dem negativen Wert von sich selbst multipliziert. So entsteht Nichtlinearität. Die Folge pendelt praktisch immer zwischen dem positiven und dem negativen Bereich hin und her.

Die Verhulst-Gleichungen - logistische Gleichungen

Eine ganz besondere Form einer nichtlinearen Rekursionsgleichung stellen die Verhulst-Gleichungen dar, die auch logistische Gleichungen genannt werden. Sie spielten in der Chaostheorie ebenfalls eine sehr große Rolle:

$$f_n = a f(n-1) \times (1 - f(n-1))$$

Oder allgemein: $f_n = a f(n-1) \times (g - f(n-1))$
(Multiplikations-Multiplikations-Subtraktions-Gleichung)

Rekursionsgleichungen (allgemein) II

Mit dieser Vorüberlegung kommen wir nun auch darauf, dass wir die Rekursionsgleichungen noch etwas allgemeiner fassen können. Es ergibt sich die dreifache Verknüpfungsformel in ihrer allgemeinen Form:

$$f_n = (a_1 \text{ verknüpft mit } f(n-b_1)) \text{ verknüpft mit } (a_2 \text{ verknüpft mit } (f(n-b_2)))$$

Für die einzelnen Definitionsbereiche gilt, was weiter oben bereits gesagt wurde. Ebenso für die Verknüpfungsvorschriften.

Eine Liste der Rekursionsgleichungen

Die Verknüpfungsformel von zwei Folgegliedern in der allgemeinen Form I:

$$f_n = f(n-1) \text{ verknüpft mit } f(n-2)$$

mit n größer gleich 2.

Für diese Verknüpfungsformel gibt es genau vier mögliche Verknüpfungen: Plus (+), Minus (-), Mal (x) und Geteilt durch (/).

1. Fall: Die Additionsformel (Lucas-Folgen):

$$f_n = f(n-1) + f(n-2) \qquad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

2. Fall: Die Subtraktionsformel:

$$f_n = f(n-1) - f(n-2) \qquad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

3. Fall: Die Multiplikationsformel:

$$f_n = f(n-1) \times f(n-2) \qquad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2$$

4. Fall: Die Divisionsformel:

$$f_n = f(n-1) / f(n-2) \qquad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

Die Verknüpfungsformel von zwei Folgegliedern in einer ebenfalls allgemeinen Form II:

$$f_n = f(n-b_1) \text{ verknüpft mit } f(n-b_2)$$

mit n größer gleich b_1 und b_2 (aus \mathbb{N}).

Auch für diese Verknüpfungsformel in der allgemeinen Form gibt es vier mögliche Verknüpfungen (+, -, x, /).

Die Verknüpfungsformel für zwei Folgeglieder in einer ebenfalls allgemeinen Form III (Logistische Gleichungen):

$$f_n = (a_1 \text{ verkn. mit } f(n-1)) \text{ verkn. mit } (a_2 \text{ verkn. mit } f(n-2))$$

mit n größer gleich 2.

Besonderheit: Die Folge $f_n = 2 f(n-1) + f(n-2)$ heißt „Pell-Folge“.

In der allgemeinen Form also: $f_n = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2)$ (kann, muss aber nicht linear sein).

Für diese Verknüpfungsformel von zwei Folgegliedern gibt es $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ mögliche Verknüpfungen der vier Grundrechenarten.

1. Fall: $f_n = (a_1 + f(n-1)) + (a_2 + f(n-2))$ (Addit.-Addit.-Addit.-Gleichung)

40. Fall: $f_n = (a_1 \times f(n-1)) \times (a_2 + f(n-2))$ (Multipl.-Multipl.-Addit.-Gleichung)

41. Fall: $f_n = (a_1 \times f(n-1)) \times (a_2 - f(n-2))$ (Multipl.-Multipl.-Subtrakt.-Gleichung)
(Verhulst-Gleichungen oder logistische Gleichungen)

Die Verknüpfungsformel für zwei Folgeglieder in der superallgemeinen Form:

$$f_n = (a_1 \text{ verkn. mit } f(n-b_1)) \text{ verkn. mit } (a_2 \text{ verkn. mit } f(n-b_2))$$

mit n größer gleich b_1 und b_2 .

Auch für diese Verknüpfungsformel in der superallgemeinen Form gibt es $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ mögliche Verknüpfungen der vier Grundrechenarten.

Die Verknüpfungsformel von drei Folgegliedern in der superallgemeinen Form:

$$f_n = (a_1 \text{ verkn. mit } f(n-b_1)) \text{ verkn. mit } (a_2 \text{ verkn. mit } f(n-b_2)) \text{ verkn. mit } (a_3 \text{ verkn. mit } f(n-b_3))$$

mit n größer gleich b_1 , b_2 und b_3 .

Abwandlungen

Die durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, und $f_n = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$ definierte Folge heißt „Tribonacci-Folge“.

Die durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 4$ und $f_n = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + f(n-4)$ definierte Folge heißt „Quadronacci-Folge“.

Teil 2

Lucas-Folgen

Die Lucas-Folgen

Unter der Lucas-Folge (im engeren Sinne) versteht man zunächst die Rekursionsfolge

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

bei der jedes Folgeglied (ab dem dritten) die Summe der beiden vorhergehenden ist.

Es gibt noch eine andere Bedeutung des Begriffs Lucas-Folgen (im weiteren Sinne), die aber in ihrer rekursiven Verknüpfungsvorschrift derart speziell ist, dass sie hier nicht weiter berücksichtigt werden soll.

Ich möchte nun noch einmal auf die obige Lucas-Folge (im engeren Sinne) eingehen. Diese Lucas-Folge genügt der Rekursionsformel:

$$f_n = f(n-1) + f(n-2) \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

Ich möchte nun einmal das Postulat aufstellen, dass jede Folge, die die obige Rekursionsformel erfüllt, Lucas-Folge (im weitesten Sinne) genannt werden soll. Es handelt sich bei obiger Rekursionsformel um die uns bereits bekannte Additionsformel.

Wenn wir dieser Forderung nachgeben, dann ist jede Lucas-Folge so definiert:

$$f_n = f(n-1) + f(n-2) \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

Hier nun einige Beispiele für Folgen, die der Additionsformel entsprechen, und daher von mir Lucas-Folgen genannt werden:

- | | | |
|---------------------|---|--|
| 1. Beispiel: | 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ... | Die Lucas-Folge (im engeren Sinn)
(1+3-Folge) |
| 2. Beispiel: | 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... | Die Fibonacci-Folge (1+1-Folge) |
| 3. Beispiel: | 2, 0, 2, 2, 4, 6, 10, 16, ... | 2+2 Folge |
| 4. Beispiel: | 3, 0, 3, 3, 6, 9, 15, 24, ... | 3+3-Folge |
| 5. Beispiel: | 3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, ... | 1+4-Folge |
| 6. Beispiel: | 4, 0, 4, 4, 8, 12, 20, 32, ... | 4+4-Folge |
| 7. Beispiel: | 4, 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, ... | 1+5-Folge |
- usw.**

Es sollte klar geworden sein, dass ich die Lucas-Folgen nach ihren beiden ersten Summen benenne. Die mit Abstand wichtigsten Lucas-Folgen habe dabei immer folgende Form:

a) 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3, 4 + 4, usw. oder

b) 1 + 3, 1 + 4, 1 + 5, 1 + 6, usw

Alle Lucas-Folgen sind durch die beiden ersten Summen (und natürlich auch die beiden ersten Zahlen der Folge) eindeutig bestimmt.

Die Liste der Additionsfolgen (Lucas-Folgen)

0+0-Folge

Fibonacci-Folge
1+1-Folge

Fibonacci-Folge
1+2-Folge 2+2-Folge

Lucas-Folge
1+3-Folge 2+3-Folge 3+3-Folge

Lucas-Nebenfolge
1+4-Folge 2+4-Folge 3+4-Folge 4+4-Folge

Lucas-Nebenfolge
1+5-Folge 2+5 Folge 3+5 Folge 4+5 Folge 5+5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- Hans Kayser/Rudolf Stöbel: Kleine Einführung in die Harmonik
- Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)
- Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese
- Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis

Als Lösung für die Additions-Formel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Additons-Lamdoma Lam(+)

Die Lösungsmenge L für die Additions-Formel ist somit $L = \text{Lam}(+)$

Teil 3

Rekursionsfolgen Lösungen einfach verknüpfter Rekursionsgleichungen

Lösungen für die Additionsformel (Lucas-Folgen)

Die Additionsformel: $f_n = f(n-1) + (f_{n-2})$ für n größer gleich 2

Additionsfolgen mit $f_0 = 0$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	1	1	2	3	5	8	Fibonacci-Folge
0	2	2	4	6	10	16	2+2-Folge
0	3	3	6	9	15	24	3+3-Folge
0	4	4	8	12	20	32	4+4 Folge
0	5	5	10	15	25	40	5+5 Folge

Additionsfolgen mit $f_0 = 1$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
1	0	1	1	2	3	5	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
1	1	2	3	5	8	13	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
1	2	3	5	8	13	21	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
1	3	4	7	11	18	29	Lucas-Folge (1+3-Folge)
1	4	5	9	14	23	37	1+4-Folge
1	5	6	11	17	28	45	1+5 Folge

Additionsfolgen mit $f_0 = 2$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
2	0	2	2	4	6	10	2+2-Folge
2	1	3	4	7	11	18	Lucas-Folge (1+3-Folge)
2	2	4	6	10	16	26	2+2-Folge
2	3	5	8	13	21	34	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)
2	4	6	10	16	26	42	2+2 Folge
2	5	7	12	19	31	50	

Additionsfolgen mit $f_0 = 3$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
3	0	3	3	6	9	15	3+3-Folge
3	1	4	5	9	14	23	1+4 Folge
3	2	5	7	12	19	31	
3	3	6	9	15	24	39	3+3-Folge
3	4	7	11	18	29	47	Lucas-Folge (1+3-Folge)
3	5	8	13	21	34	55	Fibonacci-Folge (1+1-Folge)

Additionsfolgen mit $f_0 = 4$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
4	0	4	4	8	12	20	4+4-Folge
4	1	5	6	11	17	28	
4	2	6	8	14	22	36	
4	3	7	10	17	27	44	
4	4	8	12	20	32	52	4+4-Folge
4	5	9	14	23	37	60	

Additionsfolgen mit $f_0 = 5$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
5	0	5	5	10	15	25	5+5 Folge
5	1	6	7	13	20	33	
5	2	7	9	16	25	41	
5	3	8	11	19	30	49	
5	4	9	13	22	35	57	
5	5	10	15	25	40	65	5+5-Folge

Int: (1) (1) (2) (3) (5) (8) Fibonacci-Folge (1+1-Folge)

Wenn man alle logistischen Tabellen aufmerksam studiert und miteinander vergleicht dann sieht man folgende Regelmäßigkeit:

die Intervalle von f_0 sind jeweils 0 (letzte Tabelle: $5 + 0 = 5$, $5 + 0 = 5$, usw.),

die Intervalle von f_1 sind jeweils 1 (letzte Tabelle: $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, usw.),

die Intervalle von f_2 sind jeweils 1 (letzte Tabelle: $5 + 1 = 6$, $6 + 1 = 7$, usw.),

die Intervalle von f_3 sind jeweils 2,

die Intervalle von f_4 sind jeweils 3,

die Intervalle von f_5 sind jeweils 5,

die Intervalle von f_6 sind jeweils 8,

Dieses entspricht aber wiederum genau der Fibonacci-Folge: 0, 1, 1, 2, 5, 8, 13, 21, usw. Die besondere Bedeutung der Fibonacci-Folge zeigt sich somit auch in den Zahlen selber.

Jede Folge (jede Lösung der Additionsformel) ist linear (harmonisch).

Alle Additionsfolgen sind generell divergent, mit Ausnahme der Nullstellenfolge.

Die Liste der Additionsfolgen als Lösungsmenge der Additionsformel

0+0-Folge

Fibonacci-Folge

1+1-Folge

Fibonacci-Folge

1+2-Folge

2+2-Folge

Lucas-Folge

1+3-Folge

2+3-Folge

3+3-Folge

Lucas-Nebenfolge

1+4-Folge

2+4-Folge

3+4-Folge

4+4-Folge

Lucas-Nebenfolge

1+5-Folge

2+5 Folge

3+5 Folge

4+5 Folge

5+5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- Hans Kayser/Rudolf Stöbel: Kleine Einführung in die Harmonik
- Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)
- Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese
- Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis

Als Lösung für die Additionsformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Additons-Lamdoma Lam(+)

Die Lösungsmenge L für die Additionsformel ist somit $L = \text{Lam}(+)$

Die Lösungsmenge für f2 für die Additionsformel

0+0-Folge

Fibonacci-Folge
1+1-Folge
2

Fibonacci-Folge	1+2-Folge	2+2-Folge
	3	4

Lucas-Folge	1+3-Folge	2+3-Folge	3+3-Folge
	4	5	6

Lucas-Nebenfolge			
1+4-Folge	2+4-Folge	3+4-Folge	4+4-Folge
5	6	7	8

Lucas-Nebenfolge				
1+5-Folge	2+5 Folge	3+5 Folge	4+5 Folge	5+5-Folge
6	7	8	9	10
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9
10	10	10	10	10
11	11	11	11	11
12	12	12	12	12
13	13	13	13	13
14	14	14	14	14
15	15	15	15	15
16	16	16	16	16
17	17	17	17	17
18	18	18	18	18
19	19	19	19	19
20	20	20	20	20
21	21	21	21	21
22	22	22	22	22
23	23	23	23	23
24	24	24	24	24
25	25	25	25	25
26	26	26	26	26
27	27	27	27	27
28	28	28	28	28
29	29	29	29	29
30	30	30	30	30
31	31	31	31	31
32	32	32	32	32
33	33	33	33	33
34	34	34	34	34
35	35	35	35	35
36	36	36	36	36
37	37	37	37	37
38	38	38	38	38
39	39	39	39	39
40	40	40	40	40
41	41	41	41	41
42	42	42	42	42
43	43	43	43	43
44	44	44	44	44
45	45	45	45	45
46	46	46	46	46
47	47	47	47	47
48	48	48	48	48
49	49	49	49	49
50	50	50	50	50
51	51	51	51	51
52	52	52	52	52
53	53	53	53	53
54	54	54	54	54
55	55	55	55	55
56	56	56	56	56
57	57	57	57	57
58	58	58	58	58
59	59	59	59	59
60	60	60	60	60
61	61	61	61	61
62	62	62	62	62
63	63	63	63	63
64	64	64	64	64
65	65	65	65	65
66	66	66	66	66
67	67	67	67	67
68	68	68	68	68
69	69	69	69	69
70	70	70	70	70
71	71	71	71	71
72	72	72	72	72
73	73	73	73	73
74	74	74	74	74
75	75	75	75	75
76	76	76	76	76
77	77	77	77	77
78	78	78	78	78
79	79	79	79	79
80	80	80	80	80
81	81	81	81	81
82	82	82	82	82
83	83	83	83	83
84	84	84	84	84
85				

Die Lösungsmenge für f3 für die Additionsformel

0+0-Folge
0

Fibonacci-Folge
1+1-Folge
3

Fibonacci-Folge	
1+2-Folge	2+2-Folge
5	6

Lucas-Folge		
1+3-Folge	2+3-Folge	3+3-Folge
7	8	9

Lucas-Nebenfolge			
1+4-Folge	2+4-Folge	3+4-Folge	4+4-Folge
9	10	11	12

Lucas-Nebenfolge				
1+5-Folge	2+5 Folge	3+5 Folge	4+5 Folge	5+5-Folge
11	12	13	14	15
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
5	5	5	5	5
8	8	8	8	8
13	13	13	13	13
21	21	21	21	21
34	34	34	34	34
55	55	55	55	55
89	89	89	89	89
144	144	144	144	144
233	233	233	233	233
377	377	377	377	377
610	610	610	610	610
987	987	987	987	987
1597	1597	1597	1597	1597
2584	2584	2584	2584	2584
4181	4181	4181	4181	4181
6765	6765	6765	6765	6765
10946	10946	10946	10946	10946
17711	17711	17711	17711	17711
28657	28657	28657	28657	28657
46368	46368	46368	46368	46368
75025	75025	75025	75025	75025
121393	121393	121393	121393	121393
196418	196418	196418	196418	196418
315480	315480	315480	315480	315480
511666	511666	511666	511666	511666
827185	827185	827185	827185	827185
1336555	1336555	1336555	1336555	1336555
2154736	2154736	2154736	2154736	2154736
3500471	3500471	3500471	3500471	3500471
5654807	5654807	5654807	5654807	5654807
9207480	9207480	9207480	9207480	9207480
14809120	14809120	14809120	14809120	14809120
23807139	23807139	23807139	23807139	23807139
38114859	38114859	38114859	38114859	38114859
61320318	61320318	61320318	61320318	61320318
99434637	99434637	99434637	99434637	99434637
16180338	16180338	16180338	16180338	16180338
26180338	26180338	26180338	26180338	26180338
42360676	42360676	42360676	42360676	42360676
68541014	68541014	68541014	68541014	68541014
111401928	111401928	111401928	111401928	111401928
180943942	180943942	180943942	180943942	180943942
292345870	292345870	292345870	292345870	292345870
473290012	473290012	473290012	473290012	473290012
765630024	765630024	765630024	765630024	765630024
1238920048	1238920048	1238920048	1238920048	1238920048
2007840096	2007840096	2007840096	2007840096	2007840096
3246760192	3246760192	3246760192	3246760192	3246760192
5254600384	5254600384	5254600384	5254600384	5254600384
8509200768	8509200768	8509200768	8509200768	8509200768
13763801536	13763801536	13763801536	13763801536	13763801536
22273003072	22273003072	22273003072	22273003072	22273003072
36036806144	36036806144	36036806144	36036806144	36036806144
58309809216	58309809216	58309809216	58309809216	58309809216
94346618432	94346618432	94346618432	94346618432	

Lösungen für die Subtraktionsformel

Die Subtraktionsformel:

$$f_n = f(n-1) - (f_{n-2})$$

für n größer gleich 2

Subtraktionsfolgen mit $f_0 = 0$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
0	0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge 1-1-Folge
0	1	1	0	-1	-1	0	1	
0	2	2	0	-2	-2	0	2	
0	3	3	0	-3	-3	0	3	
0	4	4	0	-4	-4	0	4	
0	5	5	0	-5	-5	0	5	

Subtraktionsfolgen mit $f_0 = 1$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
1	0	-1	-1	0	1	1	0	1-1-Folge 2-1-Folge
1	1	0	-1	-1	0	1	1	
1	2	1	-1	-2	-1	1	2	
1	3	2	-1	-3	-2	1	3	
1	4	3	-1	-4	-3	1	4	
1	5	4	-1	-5	-4	1	5	

Subtraktionsfolgen mit $f_0 = 2$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
2	0	-2	-2	0	2	2	0	2-1-Folge
2	1	-1	-2	-1	1	2	1	
2	2	0	-2	-2	0	2	2	
2	3	1	-2	-3	-1	2	3	
2	4	2	-2	-4	-2	2	4	
2	5	3	-2	-5	-3	2	5	

Subtraktionsfolgen mit $f_0 = 3$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
3	0	-3	-3	0	3	3	0
3	1	-2	-3	-1	2	3	1
3	2	-1	-3	-2	1	3	2
3	3	0	-3	-3	0	3	3
3	4	1	-3	-4	-1	3	4
3	5	2	-3	-5	-2	3	5

Subtraktionsfolgen mit $f_0 = 4$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
4	0	-4	-4	0	4	4	0
4	1	-3	-4	-1	3	4	1
4	2	-2	-4	-2	2	4	2
4	3	-1	-4	-3	1	4	3
4	4	0	-4	-4	0	4	4
4	5	1	-4	-5	-1	4	5

Subtraktionsfolgen mit $f_0 = 5$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
5	0	-5	-5	0	5	5	0
5	1	-4	-5	-1	4	5	1
5	2	-3	-5	-2	3	5	2,
5	3	-2	-5	-3	2	5	3
5	4	-1	-5	-4	1	5	4
5	5	0	-5	-5	0	5	5

Int: (1) (1) (0) (-1) (-1) (0) 1 1-1-Folge

Die Intervalle der Lösungen der Subtraktions-Gleichung entsprechen genau der 1-1-Folge.

Es zeigt sich, dass sich jede Folge (jede Lösung der Subtraktionsformel) im 6. bzw. 7. Folgeglied (f_6 bzw. f_7) wiederholt.

Jede Folge (jede Lösung der Subtraktionsformel) ist nichtlinear (nichtharmonisch).

Alle Subtraktionsfolgen sind generell divergent mit Ausnahme der Nullstellenfolge.

Die Liste der Subtraktionsfolgen als Lösungsmenge der Subtraktionsformel

0-0-Folge

1-1-Folge

1-2-Folge 2-2-Folge

1-3-Folge 2-3-Folge 3-3-Folge

1-4-Folge 2-4-Folge 3-4-Folge 4-4-Folge

1-5-Folge 2-5 Folge 3-5 Folge 4-5 Folge 5-5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- Hans Kayser/Rudolf Stöbel: Kleine Einführung in die Harmonik
- Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)
- Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese
- Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis

Als Lösung für die Subtraktionsformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Subtraktions-Lamdoma Lam(-)

Die Lösungsmenge L für die Subtraktionsformel ist somit $L = \text{Lam}(-)$

Die Lösungsmenge für f2 für die Subtraktionsformel

0-0-Folge
0

1-1-Folge
0

1-2-Folge 2-2-Folge
-1 0

1-3-Folge 2-3-Folge 3-3-Folge
-2 -1 0

1-4-Folge 2-4-Folge 3-4-Folge 4-4-Folge
-3 -2 -1 0

1-5-Folge 2-5 Folge 3-5 Folge 4-5 Folge 5-5-Folge
-4 -3 -2 -1 0

Die Lösungsmenge für f3 für die Subtraktionsformel

0-0-Folge
0

1-1-Folge
-1

1-2-Folge 2-2-Folge
-2 -2

1-3-Folge 2-3-Folge 3-3-Folge
-3 -3 -3

1-4-Folge 2-4-Folge 3-4-Folge 4-4-Folge
-4 -4 -4 -4

1-5-Folge 2-5 Folge 3-5 Folge 4-5 Folge 5-5-Folge
-5 -5 -5 -5 -5

Lösungen für die Multiplikationsformel

Die Multiplikationsformel: $f_n = f(n-1) \times f(n-2)$ **für n größer gleich 2**

Multiplikationsfolgen mit $f_0 = 0$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	1	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	2	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	3	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	4	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	5	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge

Multiplikationsfolgen mit $f_0 = 1$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
1	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
1	1	1	1	1	1	1	Einerfolge
1	2	2	4	8	32	256	2x2-Folge
1	3	3	9	27	243	...	3x3-Folge
1	4	4	16	64	...		4x4-Folge
1	5	5	25	125	...		5x5-Folge

Multiplikationsfolgen mit $f_0 = 2$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
2	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
2	1	2	2	4	8	32	2x2-Folge
2	2	4	8	32	256	...	2x2-Folge
2	3	6	18	108	...		2x3-Folge
2	4	8	32	256	...		2x2-Folge
2	5	10	50	500	...		2x5-Folge

Multiplikationsfolgen mit $f_0 = 3$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
3	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
3	1	3	3	9	27	243	3x3-Folge
3	2	6	12	72	864	...	2x6-Folge
3	3	9	27	243	...		3x3-Folge
3	4	12	48	576	...		
3	5	15	75	645	...		

Multiplikationsfolgen mit $f_0 = 4$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
4	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
4	1	4	4	16	64	1024	4x4-Folge
4	2	8	16	128	2048	...	
4	3	12	36	432	...		
4	4	16	64	1024	...		4x4-Folge
4	5	20	100	2000	...		

Multiplikationsfolgen mit $f_0 = 5$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
5	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
5	1	5	5	25	125	3125	5x5-Folge
5	2	10	20	200	4000	...	
5	3	15	45	645	...		
5	4	20	80	1600	...		
5	5	25	125	3125	...		5x5-Folge

Jede Folge (jede als Lösung der Produktformel) ist linear (harmonisch).

Alle Produktfolgen sind generell divergent, mit Ausnahme der Nullstellenfolgen und der Einerfolgen.

Die Liste der Multiplikationsfolgen als Lösungsmenge der Multiplikationsformel

0x0-Folge

1x1-Folge

1x2-Folge 2x2-Folge

1x3-Folge 2x3-Folge 3x3-Folge

1x4-Folge 2x4-Folge 3x4-Folge 4x4-Folge

1x5-Folge 2x5 Folge 3x5 Folge 4x5 Folge 5x5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- Hans Kayser/Rudolf Stöbel: Kleine Einführung in die Harmonik
- Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)
- Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese
- Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis

Als Lösung für die Multiplikationsformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Multiplikations-Lamdoma $Lam(x)$

Die Lösungsmenge L für die Multiplikationsformel ist somit $L = Lam(x)$

Die Lösungsmenge für f2 für die Multiplikationsformel

0x0-Folge
0

1x1-Folge
1

1x2-Folge 2x2-Folge
2 4

1x3-Folge 2x3-Folge 3x3-Folge
3 6 9

1x4-Folge 2x4-Folge 3x4-Folge 4x4-Folge
4 8 12 16

1x5-Folge 2x5 Folge 3x5 Folge 4x5 Folge 5x5-Folge
5 10 15 20 25

Die Lösungsmenge für f3 für die Multiplikationsformel

0x0-Folge
0

1x1-Folge
1

1x2-Folge 2x2-Folge
4 8

1x3-Folge 2x3-Folge 3x3-Folge
9 18 27

1x4-Folge 2x4-Folge 3x4-Folge 4x4-Folge
16 32 48 64

1x5-Folge 2x5 Folge 3x5 Folge 4x5 Folge 5x5-Folge
25 59 75 100 125

Lösungen für die Divisionsformel

Die Divisionsformel: $f_n = f(n-1) / (f_n-2)$ **für n größer gleich 2**

Divisionsfolgen mit $f_0 = 0$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
0	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	1	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	2	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	3	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	4	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
0	5	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert

Divisionsfolgen mit $f_0 = 1$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
1	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
1	1	1	1	1	1	1	1	Einerfolge
1	2	2	1	1/2	1/2	1	2	
1	3	3	1	1/3	1/3	1	3	
1	4	4	1	1/4	1/4	1	4	
1	5	5	1	1/5	1/5	1	5	

Divisionsfolgen mit $f_0 = 2$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
2	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
2	1	1/2	1/2	1	2	2	1	
2	2	1	1/2	1/2	1	2	2	
2	3	3/2	1/2	1/3	2/3	2	3	
2	4	4/2	1/2	1/4	2/4	2	4	
2	5	5/2	1/2	1/5	2/5	2	5	

Divisionsfolgen mit $f_0 = 3$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
3	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
3	1	$1/3$	$1/3$	1	3	3	1	
3	2	$2/3$	$1/3$	$1/2$	$3/2$	3	2	
3	3	1	$1/3$	$1/3$	1	3	3	
3	4	$4/3$	$1/3$	$1/4$	$3/4$	3	4	
3	5	$5/3$	$1/3$	$1/5$	$3/5$	3	5	

Divisionsfolgen mit $f_0 = 4$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
4	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
4	1	$1/4$	$1/4$	1	4	4	1	
4	2	$1/2$	$1/4$	$1/2$	2	4	2	
4	3	$3/4$	$1/4$	$1/3$	$4/3$	4	3	
4	4	1	$1/4$	$1/4$	1	4	4	
4	5	$5/4$	$1/4$	$1/5$	$4/5$	4	5	

Divisionsfolgen mit $f_0 = 5$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
5	0	-	-	-	-	-	-	Nicht definiert
5	1	$1/5$	$1/5$	1	5	5	1	
5	2	$2/5$	$1/5$	$1/2$	$5/2$	5	2	
5	3	$3/5$	$1/5$	$1/3$	$5/3$	5	3	
5	4	$4/5$	$1/5$	$1/4$	$5/4$	5	4	
5	5	1	$1/5$	$1/5$	1	5	5	

Für f_0 und f_1 darf nicht 0 eingesetzt werden, da die Divisionsgleichung sonst nicht definiert ist.

Es zeigt sich, dass sich jede Folge (jede Lösung der Divisionsformel) im 6. bzw. 7. Folgeglied (f_6 bzw. f_7) wiederholt. Alle Divisionsfolgen sind generell divergent, mit Ausnahme der Nullstellenfolge.

Damit haben wir nachgewiesen, dass praktisch alle Rekursionsfolgen generell divergent sind, mit Ausnahme der Nullstellenfolgen und der Einerfolgen. Jede beliebige Rekursionsformel hat unendlich viele Lösungen, und zwar immer und unweigerlich. Wir können uns leicht davon überzeugen.

Die Liste der Divisionsfolgen als Lösungsmenge der Divisionsformel

0/0-Folge

1/1-Folge

1/2-Folge 2/2-Folge

1/3-Folge 2/3-Folge 3/3-Folge

1/4-Folge 2/4-Folge 3/4-Folge 4/4-Folge

1/5-Folge 2/5 Folge 3/5 Folge 4/5 Folge 5/5-Folge

Diese Darstellung entspricht genau dem Lambdoma von Hans Kayser, also der Darstellung der Teilungsverhältnisse der Seiten in der Musik. Das Lambdoma wurde von Hans Kayser im Rahmen seiner „Harmonik“ entwickelt. Es sei daher besonders auf die folgenden Werke hingewiesen, die sich mit der Harmonik beschäftigen.

- Hans Kayser/Rudolf Stöbel: Kleine Einführung in die Harmonik
- Hans Kayer: Lehrbuch der Harmonik (Das Standard-Werk schlechthin)
- Julius Schwabe: Harmonik als schöpferische Synthese
- Julius Schwabe: Archetyp und Tierreis

Als Lösung für die Divisionsformel ergibt sich also ein Lambdoma (Abgekürzt: Lam) und zwar das von mir so genannte Divisions-Lamdoma Lam(/)

Die Lösungsmenge L für die Divisionsformel ist somit $L = \text{Lam}(/)$

Die Lösungsmenge für f2 für die Divisionsformel

0/0-Folge
0

1/1-Folge
1/1

1/2-Folge 2/2-Folge
1/2 2/2

1/3-Folge 2/3-Folge 3/3-Folge
1/3 2/3 3/3

1/4-Folge 2/4-Folge 3/4-Folge 4/4-Folge
1/4 2/4 3/4 4/4

1/5-Folge 2/5 Folge 3/5 Folge 4/5 Folge 5/5-Folge
1/5 2/5 3/5 4/5 5/5

Die Lösungsmenge für f3 für die Divisionsformel

0/0-Folge
0

1/1-Folge
1

1/2-Folge 2/2-Folge
1/2 1/2

1/3-Folge 2/3-Folge 3/3-Folge
1/3 1/3 1/3

1/4-Folge 2/4-Folge 3/4-Folge 4/4-Folge
1/4 1/4 1/4 1/4

1/5-Folge 2/5 Folge 3/5 Folge 4/5 Folge 5/5-Folge
1/5 1/5 1/5 1/5 1/5

Die Lösungsmenge für Rekursionsformeln

Gegeben sei die einfache Verknüpfungsformel in der einfachen Form:

$$f_n = f(n-1) \text{ verknüpft mit } f(n-2)$$

mit n größer gleich 2.

$$\text{Lösungsmenge } L = \text{Lam}(+), \text{Lam}(-), \text{Lam}(x), \text{Lam}(/)$$

Für diese einfache Verknüpfungsformel gibt es genau vier mögliche Verknüpfungen: Plus (+), Minus (-), Mal (x) und Geteilt durch (/).

1. Fall: Die Additionsformel (Lucas-Folgen):

$$f_n = f(n-1) + f(n-2) \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

$$\text{Lösungsmenge } L = \text{Lam}(+)$$

2. Fall: Die Subtraktionsformel:

$$f_n = f(n-1) - f(n-2) \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

$$\text{Lösungsmenge } L = \text{Lam}(-)$$

3. Fall: Die Multiplikationsformel:

$$f_n = f(n-1) \times f(n-2) \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2$$

$$\text{Lösungsmenge } L = \text{Lam}(x)$$

4. Fall: Die Divisionsformel:

$$f_n = f(n-1) / f(n-2) \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

$$\text{Lösungsmenge } L = \text{Lam}(/)$$

Dieses sind alle denkbaren Lösungen. Legt man die vier Grundrechenarten zugrunde, dann gibt es nur diese vier Lösungen. In der allgemeinen Schreibweise ergibt sich also für die Lösungsmenge: $L = \text{Lam}(+), \text{Lam}(-), \text{Lam}(x), \text{Lam}(/)$

Das im Rahmen dieser Schrift vorgestellte Lambdoma weicht etwas von dem originalen Lambdoma von Hans Kayser ab. Bei mir wird praktisch nur die eine Hälfte berücksichtigt, und zwar im Sinne des Divisions-Lambdomas $\text{Lam}(/)$. Dieses Divisions-Lambdoma stellt denn auch das Lambdoma im engeren Sinne dar, alle vier stellen hingegen das Lambdoma im weitesten Sinne dar.

Teil 4

Pell-Folgen

Die Pell-Folgen

Die Pell-Folgen sind mathematische Folgen von positiven, ganzen Zahlen, die einer bestimmten Art von Rekursionsgleichungen genügen. Die Pell-Folgen sind also rekursiv.

Die Rekursionsgleichung für die Pell-Folgen (im engeren Sinne) lautet:

$$f_n = 2 f_{(n-1)} + f_{(n-2)} \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

Die allgemeine Form dieser Art von Rekursionsgleichungen lautet:

$$f_n = a_1 f_{(n-1)} + f_{(n-2)} \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2 \text{ und } a_1 \text{ aus } \mathbb{N}.$$

Wir wollen und nun darauf beschränken, die Pell-Folgen im engeren Sinne zu betrachten.

$$f_n = 2 f_{(n-1)} + f_{(n-2)} \quad \text{mit } n \text{ größer gleich } 2.$$

Wir müssen nun nur noch die beiden ersten Zahlen festlegen, und wir haben die Pell-Folgen eindeutig definiert. Dabei können f_0 und f_1 beliebige natürliche Zahlen oder 0 sein. Wir werden später einmal alle denkbaren Lösungen systematisieren. Insgesamt gibt es unendlich viele Lösungen.

John Pell selber interessierte sich für genau zwei Folgen, die durch die folgenden Anfangsbedingungen definiert sind:

1. Pell-Folge: $f_0 = 0, f_1 = 1$ mit den Zahlen: 0, 1, 2, 6, 12, 29, 70, 169 ...

2. Pell-Folge: $f_0 = 2, f_1 = 2$ mit den Zahlen: 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, ...

Es sind aber tatsächlich beliebig viele weitere Pell-Folgen denkbar. Sehen wir es uns einmal etwas näher an.

Man kann die 1. Pell-Folge auch eine 0.1-Folge nennen, oder eine 1.2-Folge

Weitere wichtige Folgen in dieser Reihe sind die 1.3-Folge und die 1.4-Folge.

Man kann die 2. Pell-Folge auch eine 2.2-Folge nennen.

Weitere wichtige Folgen in dieser Reihe sind die 2.3-Folge

und die 0.2-Folge, die man auch 2.4-Folge nennen kann.

Lösungen für die Pell-Formel

Die (spezielle) Pell-Formel: $f_n = 2 f(n-1) + f(n-2)$ für n größer gleich 2

Pell-Folgen mit $f_0 = 0$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
0	0	0	0	0	0	0	Nullstellenfolge
0	1	2	5	12	29	70	1. Pell-Folge (1.2-Folge)
0	2	4	10	24	58	140	2.4-Folge
0	3	6	15	36	87	210	
0	4	8	20	48	116	280	
0	5	10	25	60	145	350	

Pell-Folgen mit $f_0 = 1$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
1	0	1	2	5	12	29	1. Pell-Folge (1.2-Folge)
1	1	3	7	17	41	99	1.3-Folge
1	2	5	12	29	70	169	1. Pell-Folge (1.2-Folge)
1	3	7	17	41	99	239	1.3-Folge
1	4	9	22	53	128	309	1.4-Folge
1	5	11	27	65	157	379	

Pell-Folgen mit $f_0 = 2$

f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	
2	0	2	4	10	24	58	2.4-Folge
2	1	4	9	22	53	128	1.4-Folge
2	2	6	14	34	82	198	2. Pell-Folge (2.2-Folge)
2	3	8	19	46	111	268	2.3-Folge
2	4	10	24	58	140	338	2.4-Folge
2	5	12	29	70	169	408	1. Pell-Folge (1.2-Folge)

Pell-Folgen mit $f_0 = 3$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
3	0	3	6	15	36	87
3	1	5	11	27	65	157
3	2	7	16	39	94	227
3	3	9	21	51	123	297
3	4	11	26	63	152	367
3	5	13	31	75	181	737

Pell-Folgen mit $f_0 = 4$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
4	0	4	8	20	48	118
4	1	6	13	32	77	188
4	2	8	18	44	106	258
4	3	10	23	56	135	328
4	4	12	28	68	164	398
4	5	14	33	80	193	468

Pell-Folgen mit $f_0 = 5$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
5	0	5	10	25	60	145
5	1	7	15	37	89	215
5	2	9	20	49	118	285
5	3	11	25	61	147	355
5	4	13	30	73	176	425
5	5	15	35	85	205	475

Int: (1) (2) (5) (12) (29) (70) 1. Pell-Folge (1.2-Folge)

Die Intervalle der Lösungen dieser speziellen Additions-Gleichung entsprechen genau der 1. Pell-Folge, also der 1.2-Folge.

Die Liste der Pell-Folgen als Lösungsmenge der Pell-Formel

0.0-Folge

3. Pell-F.

1.1-Folge

1.3-Folge

1. Pell-F.

1.2-Folge

2.5-Folge

2. Pell-F.

2.2-Folge

2.6-Folge

3. Pell-F.

1.3-Folge

3.7-Folge

4. Pell-F.

2.3-Folge

3.8-Folge

5. Pell-F.

3.3-Folge

3.9-Folge

6. Pell-F.

1.4-Folge

4.9-Folge

7. Pell-F.

2.4-Folge

4.10-Folge

8. Pell-F.

3.4-Folge

4.11-Folge

9. Pell-F.

4.4-Folge

4.12-Folge

Auch hier zeigt sich wieder das Lambdoma von Hans Kayser, also das Teilungsverhältnis der Seiten in der Musik. Es sei noch einmal besonders auf die Schriften von Hans Kayser und Julius Schwabe hingewiesen.

Die Lösungsmenge für f2 für die Pell-Formel

0.0-Folge

0

3. Pell-F.

1.1-Folge

1.3-Folge

3

1. Pell-F.

1.2-Folge

2.5-Folge

5

2. Pell-F.

2.2-Folge

2.6-Folge

6

1.3-Folge

3.7-Folge

7

2.3-Folge

3.8-Folge

8

3.3-Folge

3.9-Folge

9

1.4-Folge

4.9-Folge

9

2.4-Folge

4.10-Folge

10

3.4-Folge

4.11-Folge

11

4.4-Folge

4.12-Folge

12

Witere Hinweise:

Man googel vielleicht einmal die folgenden Begriffe, für die sich gute Einträge bei Wiki finden:

- **Lucas-Folge (-Zahlen)**
- **Fibonacci-Folge**
- **Pell-Folge**
- **Rekursion**
- **Differenzengleichung**
- **Lineare Differenzengleichung**
- **Verhulst-Gleichung**
- **Logistische Gleichung**
- **Harmonik**
- **Lambdoma**

Joachim Stiller Münster

Münster, 2010

Ende

[Zurück zur Startseite](#)